「学习总结」群 置换群

Jiayi Su (ShuYuMo)

2020-12-29 07:09:41

群，一种特殊的代数结构，满足封闭性、结合律、存在幺元和对于每个元素存在逆元的四种性质。

置换群，一种特殊的群，其中的元素描述了一种交换操作。# 群论简介 ## 定义 称 集合 S 和 S 上运算 $\cdot$，共同构成得代数结构记作 $(S, \cdot)$，为一个群，当且仅当其满足如下性质：

- $S \neq \emptyset$
- 封闭性：$\forall a, b \in S, a \cdot b \in S$
- 结合律：$\forall a, b, c \in S, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- 幺元：$\exists e \in S, \forall a \in S, e \cdot a = a \cdot e = a$
- 逆元：$\forall a \in S, \exists b \in S, a \cdot b = e$

几个栗子

- 实数集与实数间的乘法 $(\mathbb{R}, \times)$ 不是群，元素 $0 \in \mathbb{R}$，但是 0 不存在逆元。
- $(\mathbb{R}', \times)$ 是一个群，幺元为 1。其中 $\mathbb{R}' =$
  $x \mid x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \neq 0$
- $(\mathbb{Z}, +)$ 是一个群，幺元是 0。
- $(\mathbb{R}, +)$ 是一个群，幺元是 0。
- $(\mathbb{P}, \times)$ 是一个群，幺元是 1 ，其中 P 为某个质数的剩余系。

一类特殊的群

- 阿贝尔群：除了满足群的性质，还需要满足 $a \cdot b = b \cdot a$ 即 交换律。

置换群

不严谨定义

把 $1 \sim n$ 个对象 进行交换操作的群，置换群中集合的元素描述了一种交换操作。对应的，置换群的运算就是分别执行两种交换操作。

一种描述交换操作（置换）的记号。

举个栗子：给执行交换操作前的元素依次编号为 $1, 2, 3, 4$（对编号后，编号为 i 元素简称元素 i），交换操作后变为 $3, 1, 2, 4$。

可以描述成 $(1, 2, 3)(4)$，读作：将元素 1 换到位置 2，将元素 2，换到位置 3，将元素 3 换至位置 1，将元素 4 换至位置 4。

可以考虑成：一张包含 n 个点的图，然后使 点 i 与 点 a_i 有边相连。对于每个连通块来说，图的形态一定是一个环，从环上一个点开始按照任意方向遍历图，得到的遍历顺序就是上面描述中的一个括号内的内容。联通块的个数就是上面描述中的括号数量，其实这个可以被称为轨道数。

交换群的栗子：一个对 3 个元素的交换群：

$e, (1,2)(3), (1,3)(2), (1,2,3), (1,3,2), (2,3)(1)$

$(1)(2)\cdots(n)$ 简记为 e 即 对原元素不做交换。

burnside 引理

简化定义

设要对 n 个元素用 m 种颜色染色，对应置换群为 S，在该置换群下任意一种得到的相同方案算同一种方案。求本质不同的染色方案数。

根据 burnside 引理，其答案为。

$$ANS = \frac{1}{|S|}\sum_{s\in S} m^{\eta(s)}$$

{#eq:bns}

其中 $\eta(s)$ 为置换方案 s 的轨道数。这是关于 burnside 引理的一个简化版定义。

一个栗题：n 个排成一圈的点用 m 种颜色染色，问方案数（旋转前后的方案为一种方案）.

显然需要解决两个问题：- 置换群的构造. - 置换群元素轨道数目.

考虑这个置换群的置换集合可以是什么：(假设 n 为 6).

$$S = \begin{Bmatrix} (1)(2)(3)(4)(5)(6), \\ (1,2,3,4,5,6), \\ (1,3,5)(2,4,6) \\ (1,4)(2,5)(3,6) \\ (1,5,3)(2,6,4) \\ (1,6,5,4,3,2) \end{Bmatrix}$$

分别对应转动的位置个数为 $0 \sim n-1$。稍微模拟一下这个过程，显然移动 k 个位置的方案，轨道数为 $\gcd(k, n)$. 然后就一般化了.

完整定义

设 A 和 B 为有限集合，$X = B^A$ 表示从 A 到 B 的映射。G 是 A 上置换群，X/G 表示 G 作用在 X 上产生的所有等价类集合，若存在两种映射经过 G 的置换作用后是相同的，则将两种映射视为同一种。burnside 引理指出：

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |X^g|$$

{#eq:burnside}

其中 X^g 表示在映射集合 X 中有多少元素可以经过 g 的变化，变成一样的。

考虑与之前定义 (eq.~@eq:bns) 的联系：- 一种染色方案可以看成 元素 和 颜色 的映射。- 对于置换 s ，如果要保证其作用前后映射方案相同，必须要保证其同轨道内的元素被映射到了同一元素，即 染成了相同的颜色。- 那么考虑置换 s 的每一条轨道 η，每一条轨道颜色相同的方案数就是 $m^{\eta(s)}$ - 这与 (eq.~@eq:burnside) 的定义是相符的。

一道例题 众所周知，小葱同学擅长计算，尤其擅长计算组合数，但这个题和组合数没什么关系。

现在有一个迷宫，这个迷宫是由若干个正 $n(=4,6)$ 边形组成的 k 层迷宫。如果 $k=1$ ，那么该迷宫就由单独一个正 n 边形组成；如果 $k>1$，则在 $k-1$ 层的基础上，沿着所有最外层的边增加一个正 n 边形，新增加的正 n 边形若有重叠，则保留其中一个即可。具体可以参考下图：

现在为了打破迷宫的结界，你需要在迷宫的某些边上开一扇门。你总共需要开 r 扇门，每条边最多打开一扇门。但是如果两种开门的方案通过旋转相同，那么视为同一种方案。以及由于是死亡迷宫，所以死了也是可以的，所以你并不需要保证你开门的方案能够让你走出去。求总共的方案数。

现在可以简化一下描述一种操作的语言，burnside 引理 不关心置换的具体对象，只关心置换的大小和出现次数。可以用简写 $(a)^b$ 表示：有 b 个长度为 a 的轨道。先特殊考虑一下 $k=2$ 的情况，一共有 16 条边。可以分为转 $0^o,90^o,180^o,270^o$. - 转 0^o 的置换，可以描述为 $(1)^{16}$. - 转 90^o 的置换，可以描述为 $(4)^4$. - 转 180^o 的置换，可以描述为 $(2)^8$. - 转 270^o 的置换，可以描述为 $(4)^4$.

特殊化一下，不难发现就是：(一共有 $4k^2$ 条边)

- 转 0^o 的置换，可以描述为 $(1)^{4k^2}$.
- 转 90^o 的置换，可以描述为 $(4)^{k^2}$.
- 转 180^o 的置换，可以描述为 $(2)^{2k^2}$.
- 转 270^o 的置换，可以描述为 $(4)^{k^2}$.

根据 X^g 的定义——表示在映射集合 X 中有多少元素可以经过 g 的变化，变成一样的。我们始终要保证对于一种置换，同一轨道的元素完全相同. 所以对于第一种置换，贡献就是在轨道数中选出 r 个让他们都变成“有门存在”的状态，即 $\binom{4k^2}{r}$. 其余的同理，答案就是。

$$\frac{1}{4}\sum_{g\in G}\binom{\eta(g)}{\frac{r}{t}}$$

其中 t 为 轨道 g 的循环长度。当 $\frac{r}{t}$ 不是整数的时候，贡献为 0 ，因为 不存在某种染色方法，使得这种置换中同轨道的元素颜色相同.

适用于立体图形的 **burnside** 引理

包括对正 n 面体和足球的 面，点或棱染色。#### 立方体面染色 首先讨论置换群：考虑正方体有 12 条棱，6 个面，8 个点。

旋转轴类型	角度	数量	置换
不转	0^o	1	$(1)^6$
面面	90^o	3	$(1)^2(4)^1$
面面	180^o	3	$(1)^2(2)^2$
面面	270^o	3	$(1)^2(4)^1$
棱棱	180^o	6	$(2)^3$
点点	120^o	4	$(3)^2$
点点	240^o	4	$(3)^2$

关于角度的确定：观察旋转轴图形周围的形状。数量为总数的一半。

正十二面体染色　20 个点，12 个面，30 条棱，面为五边形。

循环节：即对于一种置换方案的轨道长度。简单理解为转多少次能够转到原来的位置。

旋转轴类型	角度	循环节	数量	面染色置换群	边染色置换群	点染色置换群
不转	0^o	1	1	$(1)^{12}$	$(1)^{30}$	$(1)^{20}$
面面轴	72^o	5	6	$(1)^2(5)^2$	$(5)^6$	$(5)^4$
面面轴	144^o	5	6	$(1)^2(5)^2$	$(5)^6$	$(5)^4$
面面轴	216^o	5	6	$(1)^2(5)^2$	$(5)^6$	$(5)^4$
点点轴	120^o	3	10	$(3)^4$	$(3)^{10}$	$(1)^2(3)^6$
点点轴	240^o	3	10	$(3)^4$	$(3)^{10}$	$(1)^2(3)^6$
棱棱轴	180^o	2	15	$(2)^6$	$(1)^2(2)^{14}$	$(2)^{10}$

以某个对象为旋转轴，其置换群中必然有两个长度为 1 的轨道，作为旋转轴的对象，旋转前后应该是重叠的。然后剩下的根据轨道循环节直接算出即可。可以发现这是一个无脑的工作

足球的置换群　实在不想写了……足球的点数不好求，但是可以根据立体图形外角和公式求出：立体图形外角和为 720^o。即 点数 $\times$ 外角度 $= 720^o$.

例题：

待填。

题外话